donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1er terme $w_0 = u_0 - v_0 = -1$.

b) On a $w_n = w_0 \cdot q^n$ où q est la raison de (w_n) donc $w_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$ donc $w_n < 0 \Rightarrow u_n - v_n < 0 \Rightarrow u_n < v_n$.

3°/a) • $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + v_n}{4} - u_n = \frac{v_n - u_n}{4} > 0$ car $u_n < v_n$ donc la suite (u_n) est croissante.

• $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} < 0$ car $u_n < v_n$ donc la suite (v_n) est décroissante.

b) • (u_n) est une suite croissante donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq u_0$ or $u_0 = 1 \Rightarrow u_n \geq 1$.

• (v_n) est une suite décroissante donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_n \leq v_0$ or $v_0 = 2 \Rightarrow v_n \leq 2$.

c) • On a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq v_n \leq 2 \Rightarrow u_n \leq 2$. On a : (u_n) est croissante et majorée par 2 donc (u_n) converge vers un réel l.

• On a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq v_n$ or $u_n \geq 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}$, $1 \leq v_n$. On a : (v_n) est décroissante et minorée par 1 donc la suite (v_n) converge vers un réel l'.

• On a $\forall n \in \mathbf{N}$, $w_n = u_n - v_n$. Or (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0 \Rightarrow 0 = l - l' \Rightarrow l = l'$.

Conclusion : (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.

4°/a) $\forall n \in \mathbf{N}$, on a : $a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} + \frac{u_n + 3v_n}{4} = u_n + v_n = a_n$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N}$, on a $a_{n+1} = a_n$ ce qui prouve que la suite (a_n) est constante et $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = a_0 = u_0 + v_0 = 3$ donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = 3$.

b) On a $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = u_n + v_n \Rightarrow u_n + v_n = 3 \Rightarrow$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3 \Rightarrow 2l = 3 \Rightarrow l = \frac{3}{2}$.